Μάθημα 5ο

21/10/16

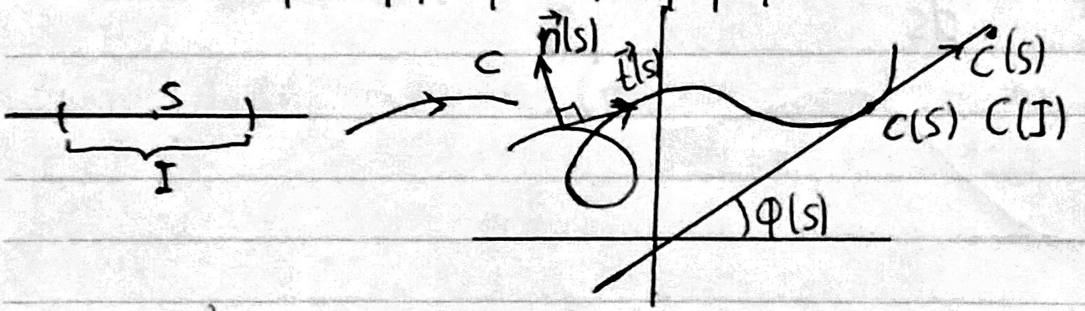
Σύνοψη

Κανονικές καμπύλες του $\mathbb{R}^2$

$c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto c(t)$

- $c'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$
- Μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 \in I$ είναι η συνάρτηση $s: I \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma$
- Κάθε κανονική αναπαραμέτρηση με παραμ. το $s = s(t)$.
- Η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου $\Leftrightarrow \|c'\| = 1$

Έστω $c(s)$ καμπύλη με φυσική παράμετρο.



Η καμπυλότητα είναι η συνάρτηση $\kappa: J \longrightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \dot{\varphi}(s) = \dfrac{d\varphi}{ds}(s)$

$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$

$\kappa = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$

$\kappa = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

Πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$

Εξισώσεις Frenet

$\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}$, $\dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t}$

$J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $J = R_{\pi/2}$

$J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

Καμπυλότητα καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ με τυχούσα παράμετρο.

$c: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ κανονική με παράμετρο t

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow s = s(t) \nearrow \leftrightarrow t = t(s), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|} > 0 \to t = t(s) = f(s)$$

Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{c} = c \circ f$, $\bar{c}(s) = c(t(s))$
Εστω $\bar{K}(s)$ η καμπυλότητα της $\bar{c}(s)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε καμπυλότητα της $c(t)$ τη συνάρτηση $K: I \to \mathbb{R}$, με $K(t) = \bar{K}(s(t))$

$$K = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}, \quad c = (x, y)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x} = \frac{dt}{ds}x'$$

$$\boxed{\dot{y} = \frac{dt}{ds}y'}$$

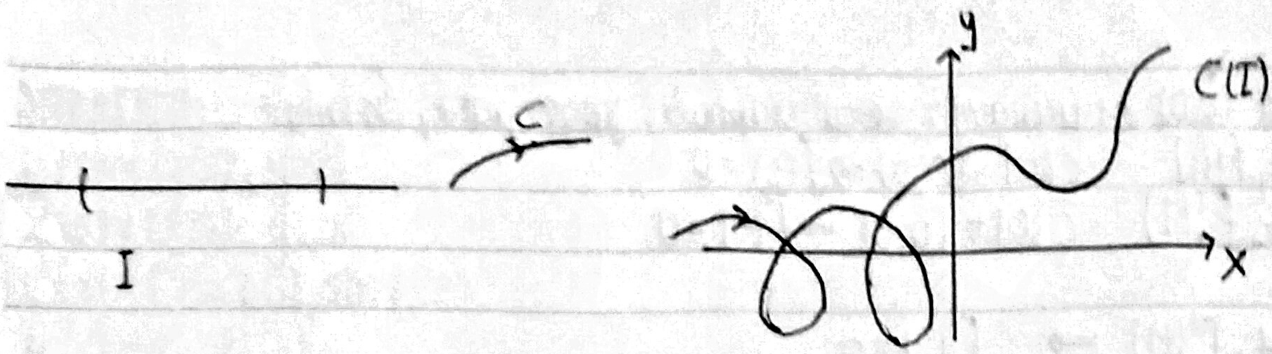
$$\ddot{x} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}x'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\frac{dx'}{dt}\right)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x'', \quad \ddot{y} = \frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''$$

Εχουμε
$$K = \frac{dt}{ds}x'\left(\frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''\right) - \frac{dt}{ds}y'\left(\frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x''\right)$$
$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 (x'y'' - y'x'') = \frac{1}{\|c'\|^3}(x'y'' - y'x'')$$

Συμπέρασμα: Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης $c(t) = (x(t), y(t))$ με τυχούσα παράμετρο είναι $K = \dfrac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$

$$K = \frac{\langle c'', Jc' \rangle}{\|c'\|^3}$$



$\vec{t} = \dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}$

$\vec{n} = J\vec{t} \Rightarrow \vec{n} = \frac{Jc'}{\|c'\|}$

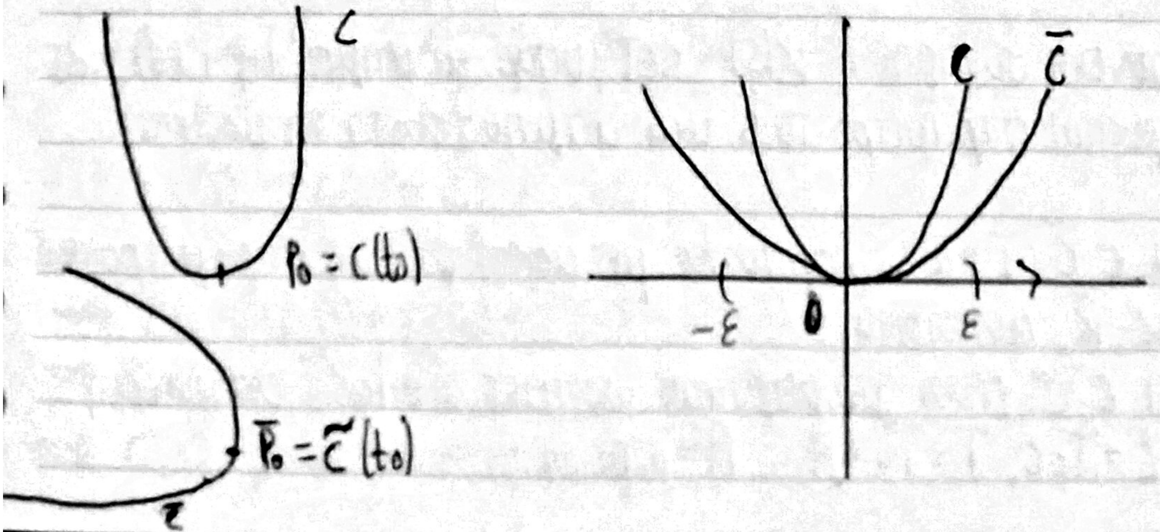
Καμπύλες γραφήματος

Θεωρώ $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεία (τουλάχιστον C^2) και την καμπύλη γράφημα
$c: I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, f(t))$, $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$
$c'(t) = (t, f'(t))$

$K = \frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}^3}$

Συμπέρασμα: Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης $c(t) = (x(t), y(t))$ με τυχούσα παράμετρο είναι $K = \frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}$

Έστω καμπύλες $c, \bar{c}$ και στο t_0: $K(t_0) > \bar{K}(t_0)$



Κοντά στο $(0,0)$ οι καμπύλες είναι καμπύλες γραφήματα, δηλαδή:

$c(t) = (t, f(t))$ $\quad c(0) = (0,0) \Rightarrow f(0) = 0$

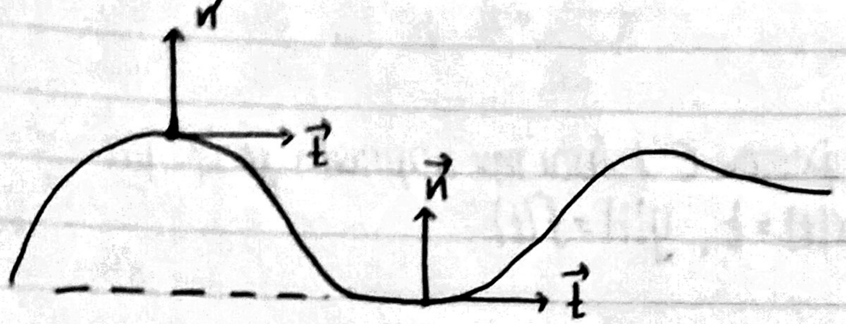
$\bar{c}(t) = (t, \bar{f}(t))$ $\quad \bar{c}(0) = (0,0) \Rightarrow \bar{f}(0) = 0$

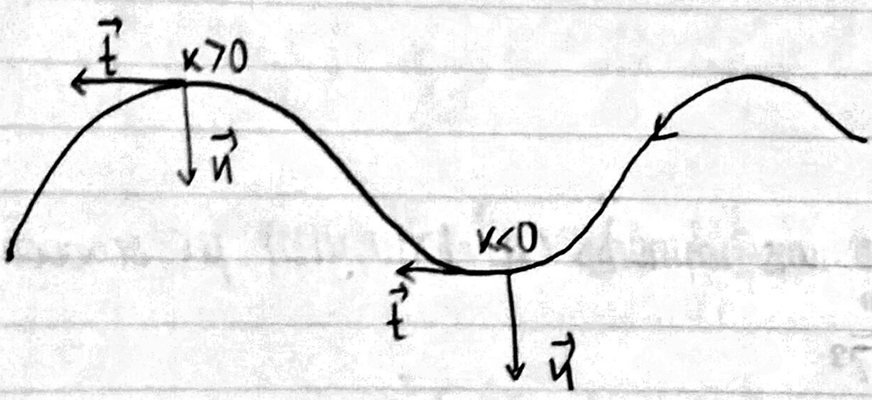
$c'(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow f'(0) = 0$

$\bar{c}'(t) = (1, \bar{f}'(t)) \Rightarrow \bar{f}'(0) = 0$

$$k(0) > k'(0) \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{1+(f'(0))^2}^3} > \frac{\bar{f}''(0)}{\sqrt{1+(\bar{f}'(0))^2}^3} \Leftrightarrow f''(0) > \bar{f}''(0)$$

Η συνάρτηση $f - \bar{f}$ παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο $\Rightarrow f(t) > \bar{f}(t)$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$





ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

• Υπαρξη: Για κάθε συνεχή συνάρτηση $k(s)$, $s \in I$, υπάρχει καμπύλη $c(s)$, $s \in I$ τέτοια ώστε $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο το s και καμπυλότητα τη δοθείσα συνάρτηση k

Μοναδικότητα: Εστω $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλες με κοινή φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητες $k, \tilde{k}$, αντίστοιχα.

Αν $k = \tilde{k}$, τότε οι $c, \tilde{c}$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες, δηλαδή υπάρχει $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ και $\tilde{c} = T \circ c$, $T = T_v \circ A$, A = στροφή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$c(s) = (x(s), y(s))$

$$\begin{cases} \dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) \\ \dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)) \end{cases}$$

$\kappa(s) = \dot{\varphi}(s)$

<u>Ύπαρξη</u>: Θεωρώ τη C^1 συνάρτηση $\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(\sigma)\, d\sigma$.

Ορίζω τη καμπύλη $c(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(u)\, du, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(u)\, du\right)$

<u>Μοναδικότητα</u>: $s_0 \in I$

Θεωρώ την καμπύλη $\bar{c} = T \circ \tilde{c}$ όπου $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ με $T = T_v \circ A \circ T_w$,

$w = -\tilde{c}(s_0)$, $v = c(s_0)$, $A \in O(2)$ A = στροφή ώστε $A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$

Η $\bar{c}$ έχει καμπύλη $\bar{\kappa} = \tilde{\kappa} = \kappa$

$c: \kappa = \dot{\varphi}$, $\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

$\bar{c}: \bar{\kappa} = \dot{\bar{\varphi}}$, $\dot{\bar{c}}(s) = (\cos\bar{\varphi}(s), \sin\bar{\varphi}(s))$

$\kappa = \bar{\kappa} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \dot{\bar{\varphi}} \Leftrightarrow \varphi - \bar{\varphi}$ = σταθερά $\Rightarrow \varphi(s) - \bar{\varphi}(s) = \varphi(s_0) - \bar{\varphi}(s_0) = 0$.

$$\bar{c}(s_0) = T_v \circ A \circ T_w(\tilde{c}(s_0)) = T_v \circ A(T_w(\tilde{c}(s_0))) = T_v \circ A(0)$$
$$= T_v(A(0)) = T_v(0) = v + 0 = c(s_0) \Rightarrow \boxed{\bar{c}(s_0) = c(s_0)}$$

$$\dot{\bar{c}} = A\dot{\tilde{c}} \Rightarrow \dot{\bar{c}}(s_0) = A\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0) \Rightarrow \boxed{\dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)}$$

$\varphi(s) = \bar{\varphi}(s) \Rightarrow \dot{c}(s) = \dot{\bar{c}}(s) \quad \forall s$

$\Rightarrow c(s) - \bar{c}(s_0)$ = σταθερά

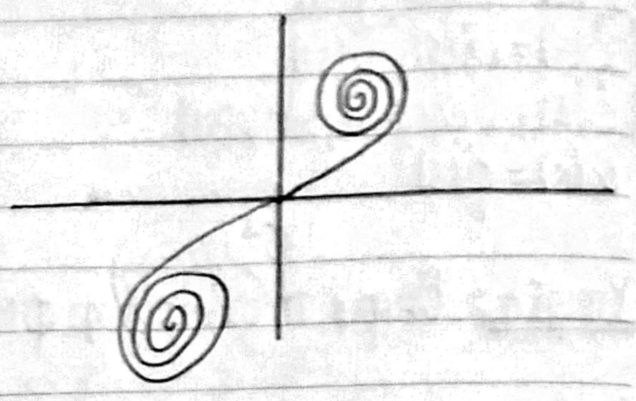
$\Rightarrow c(s) - \bar{c}(s) = c(s_0) - \bar{c}(s_0) = 0$

$\Rightarrow \bar{c} = c \Rightarrow T \circ \tilde{c} = c$

$\Rightarrow c, \tilde{c}$ γεωμετρικώς ισότιμες.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με σταθερή καμπυλότητα κ είναι:
- Ευθείες (ή τμήματα αυτών) αν $\kappa=0$

ή
- κύκλοι (ή τόξα καμπυλών) αν $\kappa\neq 0$ ακτίνας $\frac{1}{|\kappa|}$



$\kappa(s)=\lambda s$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $c(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$
1) Είναι κανονική; Βρείτε το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0=0$
2) Αν είναι κανονική, βρείτε αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου
3) Υπολογίστε την καμπυλότητα ως συνάρτηση της t αλλά και του μήκους τόξου.
4) Βρείτε το πλαίσιο Frenet και ως προς t και ως προς s.
5) Υπάρχει εφαπτομένη (ή κάθετη) ευθεία της c που να διέρχεται από το $(0,0)$

ΛΥΣΗ: 1) Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t)=(e^t(\cos t-\sin t), e^t(\sin t+\cos t))$

$\|c'(t)\|=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}\Rightarrow \|c'(t)\|=\sqrt{2}\,e^t>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Η c είναι κανονική

Το μήκος τόξου $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $s(t)=\int_0^t\|c'(\sigma)\|d\sigma=\sqrt{2}\int_0^t e^\sigma d\sigma=\sqrt{2}(e^t-1)$

$s=s(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$

2) $s=s(t)=\sqrt{2}(e^t-1)\Leftrightarrow e^t=1+\frac{s}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\ s\in(-\sqrt{2},+\infty)$

Η αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου είναι η καμπύλη $c(s)=c(t(s))=$
$=\left(\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\sin\log\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$

3) Η καμπυλότητα ως συνάρτηση της t είναι $\kappa=\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}$ $x(t)=e^t\cos t$, $y(t)=e^t\sin t$

$x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$ | $\Rightarrow$ $x''(t) = e^t(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t)$
$y'(t) = e^t(\cos t + \sin t)$ | $x''(t) = -2e^t \sin t$

$y''(t) = e^t(\cos t + \sin t - \sin t + \cos t) \Rightarrow y''(t) = 2e^t \cos t$

$$K(t) = \frac{e^t(\cos t - \sin t)\, 2e^t \cos t + e^t(\cos t + \sin t)\, 2e^t \sin t}{(\sqrt{2}e^t)^3} =$$

$$= \frac{2e^{2t}}{(\sqrt{2}e^t)^3}(\cos^2 t - \sin t\cos t + \cos t \sin t + \sin^2 t) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{(\sqrt{2}e^t)}$$

$K(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)$ δεν ενδείκνυται

$$K(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + s/\sqrt{2})} = \frac{1}{s + \sqrt{2}}$$

4) $\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$ | $\vec{t}(t) = \dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$, $\vec{u} = J\vec{t}(t)$
$\vec{u}(s) = J\vec{t}(s)$ |

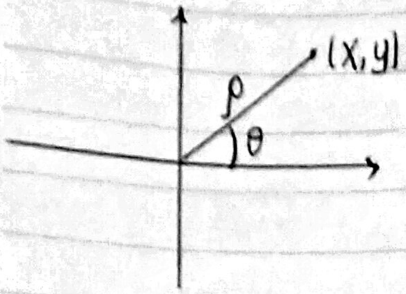
$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}(e^t(\cos t - \sin t); e^t(\cos t + \sin t)) \Rightarrow$$

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$$

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t)$$

5) Η εφαπτομένη ευθεία της C στο t, έχει διανυσματική εξίσωση $\vec{r} = c(t) + \lambda c'(t), \lambda \in \mathbb{R}$
Ερώτημα: $\exists \lambda$ $0 = c(t) + \lambda c'(t)$
$c(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$
$c'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t))$

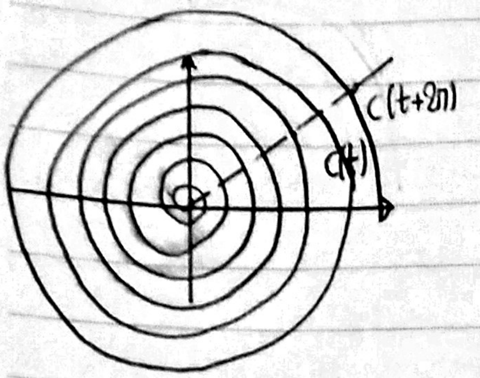
$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \end{vmatrix} = 1$$



$\rho(t)=e^{t}, \ \theta(t)=t$

$\lim_{t\to+\infty}\rho(t)=+\infty \qquad \lim_{t\to-\infty}\rho(t)=0$

$\lim_{t\to-\infty}c(t)=(0,0)$



$c(t+2\pi)$

$\rho(t+2\pi)=e^{t}e^{2\pi}$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η καμπύλη $c(t)=\left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)\right)$, $t\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$

Να υπολογιστεί η καμπυλότητα ως συνάρτηση του μήκους τόξου

$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $\qquad \cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1$

ΛΥΣΗ: Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t)=\left(1,\sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)\right)\neq(0,0)$

κανονική.

$$\|c'(t)\|=\sqrt{1+\sinh^{2}\left(\frac{t}{a}+b\right)}=\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)$$

Το μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\|c'(\sigma)\|\,d\sigma=\int_{t_0}^{t}\cosh\left(\frac{\sigma}{a}+b\right)d\sigma=$

$$=a\int_{t_0}^{t}\left(\sinh\left(\frac{\sigma}{a}+b\right)\right)'d\sigma=$$

$$=a\left\{\sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)-\sin\left(\frac{t_0}{a}+b\right)\right\}$$

Επιλέγοντας ως αφετηρία το $t_0=-ab$ έχω ότι $s=a\sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)$

Η καμπυλότητα ως συνάρτηση του t είναι $\kappa(t)=\frac{f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^{2}}^{3}}$ όπου

$f(t) = a\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)$, $f'(t) = \sinh\left(\frac{t}{a}+b\right)$, $f''(t) = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)$

$$K(t) = \frac{1}{a\cosh^3\left(\frac{t}{a}+b\right)}\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right) \Rightarrow K(t) = \frac{1}{a\cosh^2\left(\frac{t}{a}+b\right)} \Rightarrow$$

$$K(t) = \frac{1}{a\left(1+\sinh^2\left(\frac{t}{a}+b\right)\right)}$$

Η κ ως συνάρτηση του s είναι $K(s) = \frac{1}{a\left(1+\left(\frac{s}{a}\right)^2\right)}$